חלק ב'

יש לרשום פתרון מלא ומנומק לשאלות הבאות.

סכום ציוני שתי השאלות הראשונות יהווה תחליף לציון הבחן שלא התקיים.

1. (8 נקודות)

חשבו את האינטגרל

$$\int \frac{2x+1}{x^2+4x+13}dx$$

פתרון:

$$\begin{aligned}
&\int \frac{2x+1}{x^2+4x+13}dx = \int \frac{2x+4-3}{x^2+4x+13}dx = \\
= &\int \frac{2x+4}{x^2+4x+13}dx + \int \frac{-3}{x^2+4x+13}dx = \\
= &\ln|x^2+4x+13| - 3\int \frac{1}{(x+2)^2+9}dx = \\
= &\ln|x^2+4x+13| - 3\int \frac{1}{(x+2)^2+3^2}dx \\
= &\ln|x^2+4x+13| - 3\frac{1}{3}\arctan\left(\frac{x+2}{3}\right) + C = \\
= &\ln|x^2+4x+13| - \arctan\left(\frac{x+2}{3}\right) + C
\end{aligned}$$

2. (8 נקודות)

מיצאו כמה פתרונות יש למשוואה $5x^3-2x^2+3x-4=-\arctan(x)$.

פתרון: המשוואה שקולה למשוואה $5x^3-2x^2+3x-4+\arctan(x)=0$. נגדיר

$$f(x)=5x^3-2x^2+3x-4+\arctan(x)$$

שהיא רציפה כי אלמנטרית, וגזירה כי כל אחד מהמחוברים גזיר.

$$f'(x)=15x^2-4x+3+\frac{1}{1+x^2}.$$

הפולינום הריבועי $15x^2-4x+3$ מקבל את המינימום שלו בנקודה $x=\frac{-(-4)}{2\cdot 15}=\frac{4}{30}=\frac{2}{15}$ ושם הערך שלו הוא $15\cdot\left(\frac{2}{15}\right)^2-4\cdot\frac{2}{15}+3=\frac{4}{15}-\frac{8}{15}+3=-\frac{4}{15}+3>2$ ולכן

$$f'(x)=15x^2-4x+3+\frac{1}{1+x^2}>2+\frac{1}{1+x^2}>2>0$$

ולכן הנגזרת חיובית לכל x ולכן $f(x)$ עולה ממש. לכן למשוואה יש פתרון אחד לכל היותר. בנוסף

$$\lim_{x\to-\infty} 5x^3-2x^2+3x-4+\arctan(x)=-\infty, \quad \lim_{x\to\infty} 5x^3-2x^2+3x-4+\arctan(x)=\infty$$

ולכן יש $a<0<b$ עבורם

$$f(a)=5a^3-2a^2+3a-4+\arctan(a)<0<5b^3-2b^2+3b-4+\arctan(b)=f(b)$$

וכיוון ש־ $f(x)$ רציפה על $[a,b]$, אז לפי משפט ערך הביניים יש $a<c<b$ עבורו $f(c)=0$. לכן יש לפחות פתרון אחד. לכן יש בדיוק פתרון אחד.

3. (10 נקודות)
תהי

$$f(x) = |2x^3 - 3x^2 - 12x + 1|$$

מיצאו את הערך המקסימלי של $f(x)$ בקטע $[-3,3]$, ואת הנקודות בקטע בהן מתקבל הערך המקסימלי.
רמז: חישבו קודם על $g(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 1$.

פתרון:

$$g'(x) = 6x^2 - 6x - 12 = 6(x^2 - x - 2) = 6(x+1)(x-2)$$

ולכן $g'(x)$ מתאפסת בנקודות $-1, 2$ בלבד, ולכן הנקודות הקריטיות של $g(x)$ בקטע $[-3,3]$ הן $-3, -1, 2, 3$.

$$g(-3) = -44, \quad g(-1) = 8, \quad g(2) = -19, \quad g(3) = -8.$$

לכן המקסימום של $g(x)$ הוא 8 והוא מתקבל רק בנקודה $x = -1$, והמינימום של $g(x)$ הוא -44 והוא מתקבל רק בנקודה -3. לכן, לכל $x \neq -3, -1$ בקטע $[-3,3]$ מתקיים $-44 < g(x) < 8$ ולכן $f(x) = |g(x)| < \max\{|-44| = 44, |8| = 8\} = 44$ וגם $f(-1) = |g(-1)| = |8| < 44$ וגם $f(-3) = |g(-3)| = |-44| = 44$ ולכן, לכל $-3 < x \leq 3$ מתקיים ש־ $f(x) = |g(x)| < f(-3) = 44$ ולכן הערך המקסימלי הוא 44 והוא מתקבל רק ב־ $x = -3$.

4. (10 נקודות)
חשבו את $\sqrt[3]{9} = 9^{\frac{1}{3}}$ בשגיאה שקטנה או שווה ל־ 10^{-3}.

פתרון: נסתכל על $f(x) = x^{\frac{1}{3}}$. נסתכל על פולינום טיילור סביב $a = 8$. נשים לב, שבנוסחת השארית לפי לגרנג', $8 < c < 9$ ולכן $2 < c^{\frac{1}{3}}$ ולכן $0 < \frac{1}{c^{\frac{1}{3}}} < \frac{1}{2}$.

$$f(8) = 8^{\frac{1}{3}} = 2$$

$$f'(x) = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3x^{\frac{2}{3}}}, \quad f'(8) = \frac{1}{12}$$

$$|R_0(9)| = \left|\frac{1}{1!} \cdot \frac{1}{3c^{\frac{2}{3}}} \cdot (9-8)^1\right| = \frac{1}{3c^{\frac{2}{3}}} \leq \frac{1}{3 \cdot 4} = \frac{1}{12}$$

$$f''(x) = -\frac{2}{9}x^{-\frac{5}{3}} = -\frac{2}{9x^{\frac{5}{3}}}, \quad f''(8) = -\frac{2}{9 \cdot 2^5} = -\frac{2}{288} = -\frac{1}{144}$$

$$|R_1(9)| = \left|-\frac{1}{2!} \cdot \frac{2}{9c^{\frac{5}{3}}} \cdot (9-8)^2\right| = \frac{1}{9c^{\frac{5}{3}}} \leq \frac{1}{9 \cdot 2^5} = \frac{1}{288}$$

$$f'''(x) = \frac{10}{27}x^{-\frac{8}{3}} = \frac{10}{27x^{\frac{8}{3}}}, \quad f'''(8) = \frac{10}{27 \cdot 2^8} = \frac{5}{3456}$$

$$|R_2(9)| = \left|\frac{1}{3!} \cdot \frac{10}{27c^{\frac{8}{3}}} \cdot (9-8)^3\right| = \frac{5}{81c^{\frac{8}{3}}} \leq \frac{5}{81 \cdot 2^8} < \frac{1}{1000}$$

ולכן, $T_2(9)$ הוא מספר שהמרחק שלו מ־ $9^{\frac{1}{3}}$ הוא לכל היותר 10^{-3} ולכן

$$T_2(x) = 2 + \frac{1}{12}(x-8) - \frac{1}{288}(x-8)^2$$

$$T_2(9) = 2 + \frac{1}{12}(9-8) - \frac{1}{288}(9-8)^2 = 2 + \frac{1}{12} - \frac{1}{288}$$

5. (8 נקודות)
מיצאו את תחום ההתכנסות של טור החזקות

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n-1}{n^2+1} \cdot x^{2n}$$

רמז: הסתכלו קודם על $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n-1}{n^2+1} \cdot t^n$.

פתרון: המקדמים הם חיוביים ולכן

$$\left(\frac{4^n-1}{n^2+1}\right)^{\frac{1}{n}} = \left(\frac{4^n(1-4^{-n})}{n^2(1+\frac{1}{n^2})}\right)^{\frac{1}{n}} = \frac{4}{\left(n^{\frac{1}{n}}\right)^2} \cdot \left(\frac{1-4^{-n}}{1+\frac{1}{n^2}}\right)^{\frac{1}{n}} \to \frac{4}{1^2} \cdot 1^0 = 4$$

ולכן רדיוס ההתכנסות של $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n-1}{n^2+1} \cdot t^n$ הוא $R = \frac{1}{4}$. בקצוות

$$x = \frac{1}{4}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n-1}{n^2+1} \cdot \frac{1}{4^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-4^{-n}}{n^2+1}$$

וכיוון ש־ $0 \le \frac{1-4^{-n}}{n^2+1} \le \frac{1}{n^2+1} \le \frac{1}{n^2}$ לכל $m \ge 1$ וכיוון ש־ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ מתכנס כי $p = 2 > 1$, אז הטור שלנו מתכנס. בקצה השני,

$$x = -\frac{1}{4}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n-1}{n^2+1} \cdot \frac{(-1)^n}{4^n} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1-4^{-n}}{n^2+1}$$

הטור מתכנס בהחלט כי

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left|(-1)^n \frac{1-4^{-n}}{n^2+1}\right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-4^{-n}}{n^2+1}$$

שראינו שמתכנס. לכן טור החזקות $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n-1}{n^2+1} \cdot t^n$ מתכנס ב־ $[-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}]$. לכן טור החזקות

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n-1}{n^2+1} \cdot x^{2n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n-1}{n^2+1} \cdot (x^2)^n$$

מתכנס כאשר $-\frac{1}{4} \le x^2 \le \frac{1}{4}$ ולכן הוא מתכנס כאשר $-\frac{1}{2} \le x \le \frac{1}{2}$ ולכן תחום ההתכנסות שלו הוא $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$.

6. (8 נקודות)
הוכיחו כי

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \sin\left(\frac{x^2}{n}\right) dx = 0$$

רמז: לא ע"י חישוב האינטגרל

פתרון: לכל $n \ge 1$ ולכל $0 \le x \le 1$ מתקיים כי $0 \le \frac{x^2}{n} \le 1$ ולכן $0 \le \sin\left(\frac{x^2}{n}\right) \le \frac{x^2}{n}$ ולכן, לפי מונוטוניות של האינטגרל המסוים,

$$0 = \int_0^1 0 dx \le \int_0^1 \sin\left(\frac{x^2}{n}\right) dx \le \int_0^1 \frac{x^2}{n} dx = \frac{1}{n} \int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3n} \to 0$$

ולכן, לפי סנדביץ,

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \sin\left(\frac{x^2}{n}\right) dx = 0$$